JORGE NOTES · IDEAS · APÉNDICE MATEMÁTICO

La geometría de la felicidad

Desarrollo matemático del modelo de restricción, conversión, riesgo y valor social

Jorge Sosadiaz · 28 de septiembre de 2026

Qué es este documento. Este apéndice formaliza el modelo construido en el artículo *La geometría de la felicidad*. No pretende presentar una "ecuación verdadera de la felicidad". Su objetivo es más modesto y, a la vez, más útil: producir predicciones, identificar cuellos de botella y mostrar qué supuestos habría que medir para convertir el marco en un modelo empírico.

1. El modelo en una línea

La versión normalizada del modelo es:

$$V = pK(A + T) - (1 - p)L + \ln(1 - d) - O$$

con

$$A = F + H + G + R + I, \qquad T = \lambda S, \qquad d = \frac{C}{M}.$$

La interpretación es:

- V — valor neto esperado de una decisión.
- p — probabilidad de que la oportunidad produzca el resultado valioso esperado.
- K — capacidad de conversión: qué tan bien una persona transforma una oportunidad en bienestar.
- A — valor intrínseco total: función (F), placer (H), significado (G), recuerdo o persistencia (R) e identidad personal (I).
- T — valor social/aspiracional efectivo; se escribe $T = \lambda S$, donde S representa estatus, pertenencia o señalización y λ cuánto pesa socialmente.
- L — pérdida si la decisión no se convierte en el resultado esperado.
- d — sacrificio relativo: costo C dividido por margen disponible M.
- O — costo de oportunidad que no está ya contado en C: objetivos desplazados, tiempo o alternativas importantes sacrificadas.

Si las escalas empíricas de los bloques no fueran comparables, una versión calibrable introduciría pesos:

$$V = pK(A + T) - (1 - p)L + \theta \ln(1 - d) - \eta O.$$

La versión principal fija $\theta = \eta = 1$ para estudiar la estructura antes de estimar parámetros.

2. De dónde sale el término de restricción

La única no linealidad fuerte del modelo base no fue añadida para "hacerlo más realista". Aparece al representar la utilidad del margen económico restante con una función logarítmica.

Sea M el margen disponible antes de una decisión y C su costo. Después de pagar queda $M - C$. Si

$$u(M) = \ln M,$$

entonces el cambio de utilidad asociado al dinero restante es

$$\begin{aligned} \Delta u &= \ln(M - C) - \ln M \\ &= \ln\left(\frac{M - C}{M}\right) \\ &= \ln\left(1 - \frac{C}{M}\right) \\ &= \ln(1 - d). \end{aligned}$$

Por eso $d = C/M$ aparece de forma natural: el mismo precio absoluto no representa el mismo sacrificio para dos personas con márgenes diferentes.

El costo positivo equivalente es

$$C_d = -\ln(1 - d).$$

Sus derivadas son

$$C_d' = \frac{1}{1 - d} > 0, \qquad C_d'' = \frac{1}{(1 - d)^2} > 0.$$

Esto implica que el daño marginal de sacrificar margen se acelera al acercarse al límite.

Sacrificio d	$\lvert\partial V/\partial d\rvert = 1/(1 - d)$
0.10	1.11
0.50	2.00
0.80	5.00
0.90	10.00
0.95	20.00

El último tramo de libertad económica cuesta mucho más que el primero.

La elección logarítmica es un supuesto, no una ley. Una generalización estándar es CRRA. Si el margen inicial se normaliza a 1, el costo puede escribirse

$$C_\rho(d) = \frac{1 - (1 - d)^{1-\rho}}{1 - \rho}, \qquad \rho \neq 1,$$

y cuando $\rho \to 1$ se recupera $-\ln(1-d)$. Esto permite estimar la curvatura en lugar de imponerla.

3. Beneficio, capacidad y probabilidad no son lo mismo

El bloque positivo es

$$pK(A+T).$$

Separar sus factores evita una confusión importante.

- $A+T$ describe **cuánto valor potencial** contiene la experiencia para esa persona.
- K describe **cuánto valor obtiene si puede aprovecharla**: salud, conocimiento, atención, energía, habilidades, sensibilidad, etc.
- p describe **qué probabilidad existe de que la oportunidad se materialice** como se espera.

Así, una oportunidad extraordinaria puede tener poco valor esperado si p es bajo. Una persona muy capaz puede obtener poco si está apostando en el contexto equivocado. Y una oportunidad con alta probabilidad puede seguir siendo poco interesante si $A+T$ es bajo.

Para que p y K no se dupliquen, la lectura base es: p es la probabilidad de realización; K es la intensidad o eficiencia de conversión *condicional* a esa realización. En un modelo empírico más rico podría modelarse $p = p(K, \text{ajuste}, \text{contexto})$.

4. El componente social

El modelo mantiene separado el valor social:

$$T = \lambda S.$$

S puede representar visibilidad, estatus, pertenencia, comparación o reconocimiento. λ representa cuánto pesa esa dimensión en la situación concreta. El punto no es asumir que el valor social es falso: puede ser una fuente real de utilidad. La distinción permite preguntar cuánto de una decisión proviene del valor intrínseco A y cuánto de su valor relacional T.

Esto ayuda a representar diferencias como Android versus iPhone, o transporte funcional versus un automóvil de lujo, sin afirmar que la diferencia sea únicamente funcional o únicamente de estatus.

5. Derivadas: qué palanca mueve el sistema

Para la versión normalizada,

$$V = pK(A+T) - (1-p)L + \ln(1-d) - O,$$

las derivadas parciales son:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial p} &= K(A+T)+L,\\
\frac{\partial V}{\partial K} &= p(A+T),\\
\frac{\partial V}{\partial A} &= pK,\\
\frac{\partial V}{\partial T} &= pK,\\
\frac{\partial V}{\partial L} &= -(1-p),\\
\frac{\partial V}{\partial d} &= -\frac{1}{1-d},\\
\frac{\partial V}{\partial O} &= -1.
\end{aligned}$$

La primera ecuación contiene una conclusión útil: aumentar p tiene un doble efecto. Aumenta la probabilidad de capturar el beneficio y, simultáneamente, disminuye el peso de la pérdida L.

Mejorar la probabilidad de conversión puede ser más valioso que aumentar el tamaño de la recompensa.

Como $d = C/M$, manteniendo lo demás fijo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial C} &= -\frac{1}{M-C},\\
\frac{\partial V}{\partial M} &= \frac{C}{M(M-C)}.
\end{aligned}$$

Cuando $C \ll M$, el costo marginal financiero es pequeño. Cuando $C \to M$, el efecto se vuelve extremadamente grande.

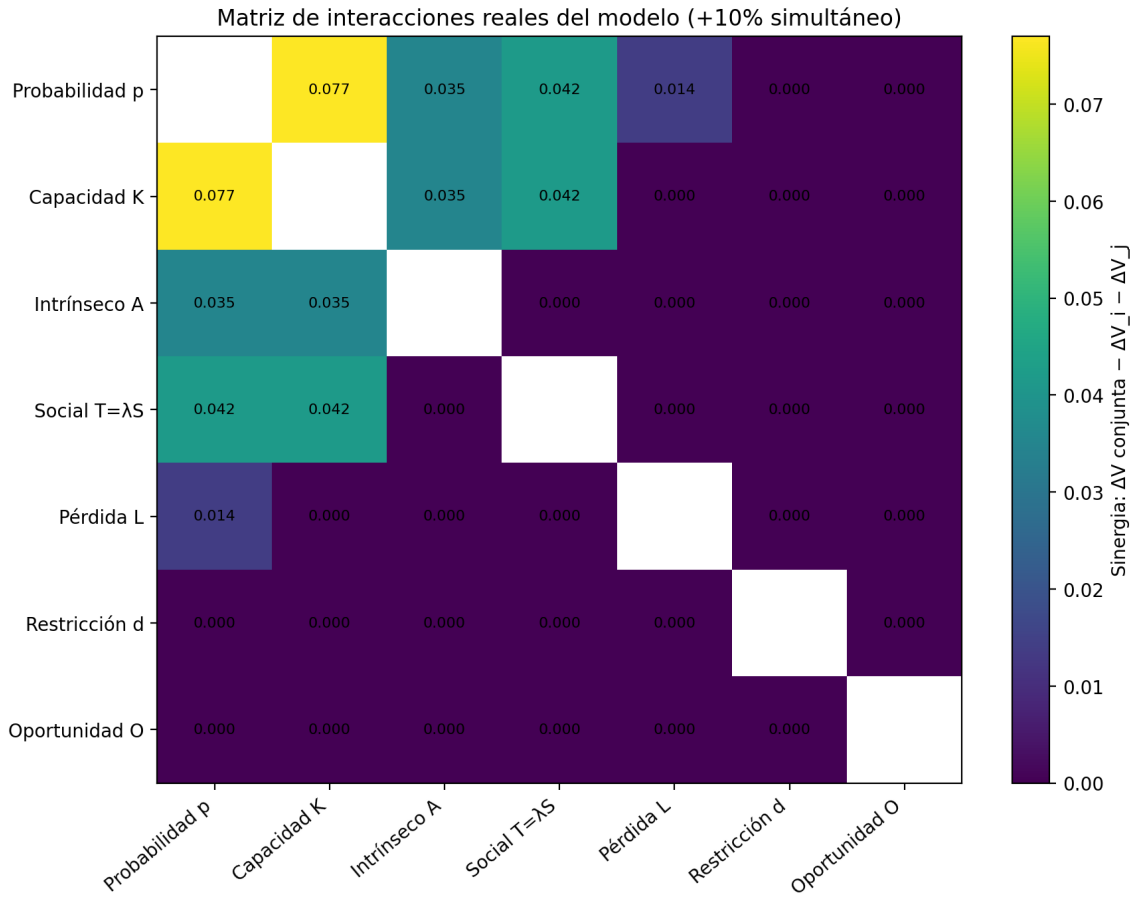
6. Interacciones reales del modelo

Las interacciones no se añadieron a mano. Surgen del término multiplicativo $pK(A+T)$.

Entre las derivadas cruzadas no nulas están:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial p\,\partial K} = A + T,$$
$$\frac{\partial^2 V}{\partial p\,\partial A} = K,$$
$$\frac{\partial^2 V}{\partial p\,\partial T} = K,$$
$$\frac{\partial^2 V}{\partial K\,\partial A} = p,$$
$$\frac{\partial^2 V}{\partial K\,\partial T} = p,$$
$$\frac{\partial^2 V}{\partial p\,\partial L} = 1.$$

Por el contrario, d está en un bloque aditivo independiente y sus derivadas cruzadas con p, K, A y T son cero en el modelo base. Esto explica una observación de las gráficas: la restricción puede dominar cerca del límite, pero no "multiplica" directamente la capacidad o la probabilidad. Si los datos mostraran esa interacción, habría que extender el modelo; no introducirla por intuición.



Matriz de interacciones obtenida con cambios finitos ilustrativos. Los números dependen de la parametrización; el patrón de ceros y las interacciones multiplicativas provienen de la estructura del modelo.

7. Umbrales que sí se pueden derivar

Una de las ventajas de la forma compacta es que permite obtener reglas de decisión sin añadir nuevas funciones.

Definamos

$$X = pK(A+T) - (1-p)L - O.$$

Entonces

$$V = X + \ln(1-d).$$

Para que $V > 0$:

$$\begin{aligned} X + \ln(1-d) &> 0, \\ \ln(1-d) &> -X, \\ 1-d &> e^{-X}, \\ d &< 1 - e^{-X}. \end{aligned}$$

Por tanto, el **sacrificio relativo máximo compatible con valor neto positivo** es

$$d^* = 1 - e^{-X}$$

Si una decisión consume más que d^* del margen, deja de compensar dentro de los supuestos del modelo.

También puede despejarse la probabilidad mínima necesaria:

$$p^* = \frac{L + O - \ln(1-d)}{K(A+T) + L}.$$

Y la capacidad mínima:

$$K^* = \frac{(1-p)L + O - \ln(1-d)}{p(A+T)},$$

si $p > 0$ y $A + T > 0$.

Estas expresiones transforman el modelo en una herramienta estratégica. No preguntan solamente "¿es buena esta decisión?", sino **qué tendría que cambiar para que lo fuera**.

8. Dos ejemplos concretos

Los siguientes números son deliberadamente ilustrativos. No son estimaciones psicológicas ni escalas calibradas; muestran cómo opera la ecuación.

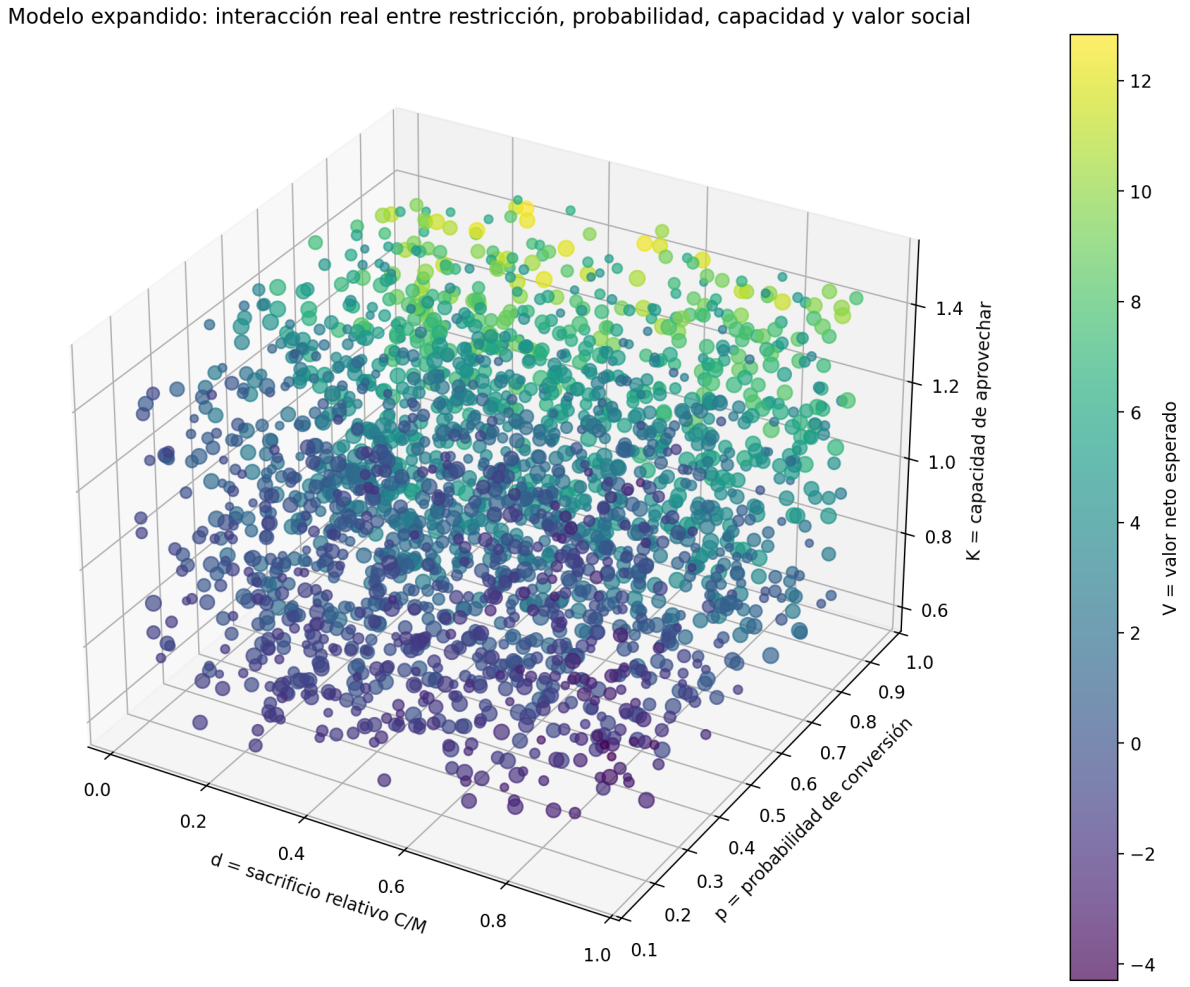
Decisión	p	K	$A+T$	d	O	V	d^*
Android funcional	0.95	1.00	0.75	0.10	0.05	0.55	0.48
iPhone aspiracional (margen limitado)	0.90	1.00	1.30	0.55	0.15	0.20	0.63
El mismo iPhone (margen amplio)	0.90	1.00	1.30	0.08	0.15	0.92	0.63
Libro	0.98	1.20	0.48	0.02	0.01	0.53	0.43
Viaje extraordinario	0.85	1.20	1.45	0.65	0.15	0.24	0.73
El mismo viaje (margen amplio)	0.85	1.20	1.45	0.15	0.15	1.13	0.73

Dos patrones aparecen incluso en este ejemplo simple.

iPhone. El modelo puede asignarle más valor potencial que a un Android debido a T, pero el mismo iPhone cambia radicalmente de valor neto cuando cambia d. No es el objeto el que cambia: cambia el sacrificio relativo.

Viaje. El viaje tiene mucho más valor potencial que un libro, pero con $d = 0.65$ su valor neto queda muy por debajo del mismo viaje cuando el margen permite que $d = 0.15$. Esto formaliza la diferencia entre felicidad absoluta y felicidad por unidad de sacrificio.

9. La gráfica 3D y la “zona amarilla”



Ejes: d sacrificio relativo, p probabilidad de conversión y K capacidad. Color: valor neto V. Tamaño: componente social/aspiracional T. En Jorge Notes la versión web puede rotarse en 3D.

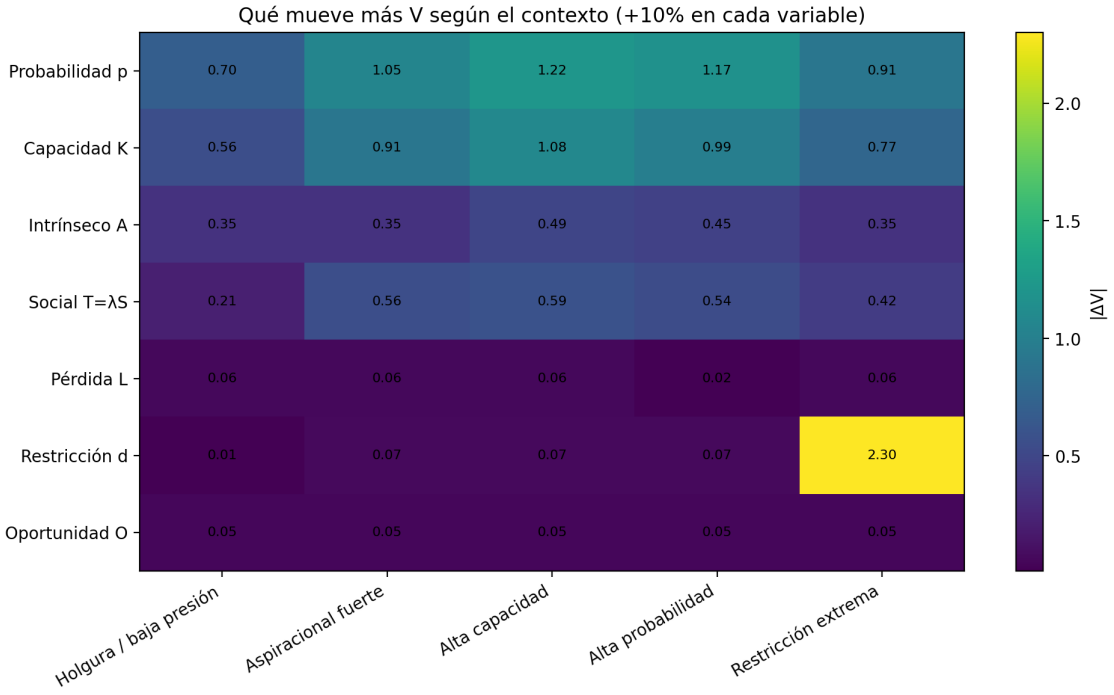
La región de valores muy altos aparece concentrada porque el término positivo exige alineación entre p, K y $A + T$, mientras la restricción puede castigar fuertemente cuando d se acerca a 1.

Sin embargo, hay una diferencia crucial entre **geometría** y **probabilidad**. La nube de puntos de la simulación usa distribuciones elegidas para explorar el espacio. Por eso no demuestra que la felicidad máxima tenga en la población la misma rareza visual que el amarillo en la figura. Para convertir área o densidad de color en probabilidad real necesitaríamos estimar las distribuciones conjuntas de p, K, A, T, L, d y O.

Lo que sí es una predicción estructural es:

Los valores extremos requieren que varias condiciones favorables coincidan; una sola variable extraordinaria no garantiza un valor neto extraordinario.

10. Sensibilidad y cambio de régimen



Sensibilidad ilustrativa ante cambios del 10% en cada variable. Los valores no son estimaciones poblacionales: muestran cómo la importancia relativa cambia con el contexto.

La estructura sugiere dos regímenes.

Con holgura suficiente, $\ln(1-d)$ cambia lentamente. Las decisiones pueden estar dominadas por calidad de la oportunidad, capacidad de conversión y valor intrínseco/social.

Cerca del límite, $|\partial V/\partial d| = 1/(1-d)$ crece rápidamente. Recuperar margen puede pasar a ser una intervención más valiosa que buscar una experiencia todavía mejor.

Esto no fija un porcentaje universal de “peligro”. El punto exacto depende de las escalas y parámetros empíricos.

11. Qué simplificamos y por qué

El modelo comenzó con muchas variables. Varias podían agruparse sin perder estructura.

- F, H, G, R, I se agrupan en A porque, en el modelo base, entraban de la misma manera. Se separan solo si queremos estudiar qué componente cambia.
- λ y S pueden resumirse como $T = \lambda S$ cuando solo interesa su producto efectivo. Se conservan separados si queremos estudiar sensibilidad a la norma social versus intensidad del símbolo.
- C y M no necesitan aparecer independientemente en el bloque de restricción porque su efecto está contenido en $d = C/M$. C puede seguir apareciendo si además modifica A, T u O en una aplicación específica.

- La irreversibilidad Q puede integrarse en L si L se define como la pérdida completa cuando la decisión sale mal. Mantener ambos términos sería doble conteo si describen el mismo daño.

Esta simplificación deja cuatro mecanismos conceptuales:

$$\boxed{\text{conversión} - \text{riesgo} - \text{restricción} - \text{oportunidad perdida}}$$

12. Predicciones que podrían ponerse a prueba

El valor científico del modelo dependerá de que produzca predicciones refutables. Entre ellas:

1. A igualdad de beneficio potencial, aumentar d debería reducir el valor percibido cada vez más rápido conforme d se aproxima a 1.
2. El efecto de mejorar K debería ser mayor cuando p y $A + T$ son altos.
3. El efecto de elevar p debería crecer con $K(A + T)$ y con el tamaño de la pérdida evitada L.
4. Dos personas con el mismo costo absoluto C deberían diferir sistemáticamente cuando sus márgenes M son distintos, incluso controlando por ingreso bruto.
5. En decisiones altamente visibles, T debería explicar una porción mayor de la disposición a pagar que en decisiones privadas comparables.
6. La estrategia óptima debería cambiar por régimen: cuando d es bajo, mejorar conversión u oportunidad puede dominar; cuando d es extremo, reducir restricción debería ganar importancia.

13. Extensiones que el modelo todavía no contiene

Algunas intuiciones surgidas durante la exploración son plausibles, pero no deberían introducirse con una función inventada.

Adaptación y abundancia. Una persona muy rica o muy expuesta a experiencias similares podría obtener menor valor marginal. Eso puede representarse haciendo $A = A(E)$, donde E es exposición previa, pero la forma de $A(E)$ debería estimarse.

Fama y comparación. La visibilidad podría aumentar S o λ, pero el mecanismo y su intensidad requieren datos.

Capacidad dinámica. Salud, aprendizaje y relaciones podrían modificar K a lo largo del tiempo. Un modelo dinámico podría usar $K_{t+1} = K_t + g(x_t) - \delta_K K_t$, pero g no debe fijarse sin evidencia.

Probabilidad endógena. En emprendimiento, carrera o educación, K probablemente también altera p. La versión base los separa para mantener interpretabilidad; una estimación empírica debería probar esa dependencia.

14. Qué está respaldado por literatura previa

El modelo completo no es una fórmula tomada de un estudio previo. Es una síntesis. Sin embargo, varios bloques tienen paralelos claros.

La idea de K se aproxima al *Capability Approach*: personas distintas pueden convertir recursos similares en resultados diferentes. Chiappero-Martinetti, Salardi y Scervini desarrollaron incluso una estrategia empírica para estimar "conversion rates" entre recursos y logros [1].

El bloque de restricción es compatible con la literatura de utilidad marginal decreciente e ingreso/bienestar. Diener y colaboradores encontraron que el ingreso logarítmico estaba relacionado con evaluación de vida de forma aproximadamente lineal, implicando rendimientos decrecientes en ingreso bruto [2]. La literatura de escasez, revisada por de Bruijn y Antonides, respalda especialmente que la escasez intensifica el foco y los trade-offs, aunque la evidencia sobre una reducción general de "bandwidth" cognitivo es menos concluyente [3].

El bloque social está alineado con investigación sobre ingreso relativo y comparación [4]. Además, experimentos preregistrados de Velandia-Morales, Rodríguez-Bailón y Martínez encontraron que mayor desigualdad percibida aumentaba búsqueda de estatus, consumo de estatus y materialismo [5].

La distinción entre valor intrínseco y tipos de consumo también conversa con la literatura sobre compras experienciales. Un meta-análisis de 141 estudios encontró una ventaja promedio de experiencias sobre posesiones, pero con moderadores importantes, incluido el nivel socioeconómico y si la experiencia era negativa o solitaria [6].

Finalmente, separar pérdidas de ganancias es coherente con evidencia de asimetrías en bienestar: De Neve y colaboradores encontraron que el bienestar subjetivo respondía más fuertemente a crecimiento económico negativo que a positivo [7].

15. Qué falta para convertirlo en un modelo empírico

El siguiente paso no es añadir más ecuaciones. Es medir.

Habría que construir escalas o proxies para A, T, K, L y O; definir el horizonte temporal; estimar p; observar el margen realmente disponible M, no solo ingreso; y recoger resultados posteriores de bienestar. Después podrían compararse especificaciones, estimar pesos θ y η, probar CRRA frente a log, y evaluar si las interacciones propuestas mejoran predicción fuera de muestra.

La gráfica dejaría entonces de mostrar un espacio hipotético para empezar a mostrar una distribución observada.

El objetivo no es ajustar la realidad a la fórmula. Es usar la fórmula para descubrir qué conviene medir, qué predice y qué decisión podría aumentar la probabilidad de bienestar.

Referencias

1. Enrica Chiappero-Martinetti, Paola Salardi, Francesco Scervini (2019), *Health Economics*. Estimating conversion rates: A new empirical strategy with an application to health care in Italy. Consensus: 7 citas al momento de consulta.
2. Ed Diener, Wei-Ting Ng, James K. Harter, Raksha Arora (2010), *Journal of Personality and Social Psychology*. Wealth and happiness across the world: material prosperity predicts life evaluation, whereas psychosocial prosperity predicts positive feeling. Consensus: 347 citas.
3. E. de Bruijn, G. Antonides (2021), *Theory and Decision*. Poverty and economic decision making: a review of scarcity theory. Consensus: 236 citas.
4. Andrew E. Clark, P. Frijters, Michael A. Shields (2008), *Journal of Economic Literature*. Relative Income, Happiness and Utility: An Explanation for the Easterlin Paradox and Other Puzzles. Consensus: 3,379 citas.
5. Andrea Velandia-Morales, Rosa Rodríguez-Bailón, Rocío Martínez (2022), *Frontiers in Psychology*. Economic Inequality Increases the Preference for Status Consumption. Consensus: 42 citas.
6. E. Weingarten, Joseph K. Goodman (2020), *Journal of Consumer Research*. Re-examining the Experiential Advantage in Consumption: A Meta-Analysis and Review. Consensus: 100 citas.
7. J. De Neve, George Ward, B. Van Landeghem, G. Kavetsos, M. Norton (2017), *Review of Economics and Statistics*. The Asymmetric Experience of Positive and Negative Economic Growth: Global Evidence Using Subjective Well-Being Data. Consensus: 140 citas.